ПРОИЗВОДНЫЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Кувандиков Мухаммад Кувандикович
Ташкентский финансовый институт
преподаватель кафедры высшей и прикладной математики

Возможно, название этой статьи вас озадачит. И в самом деле – ведь на предыдущих уроках (***Частные производные функции двух и трёх переменных***) мы уже неоднократно сталкивались с частными производными сложных функций наподобие $u=\sin(xy),\quad u=\sqrt{xyz}$ и более трудными примерами. Так о чём же ещё можно рассказать?! …А всё как в жизни – нет такой сложности, которую было бы нельзя усложнить =) Но математика – на то и математика, чтобы укладывать многообразие нашего мира в строгие рамки. И иногда это удаётся сделать одним-единственным предложением:

В общем случае сложная функция имеет вид $u=f(v_1,v_2,v_3,\dots,v_n)$, где, *по меньшей мере, одна* из букв $v_1,v_2,v_3,\dots,v_n$ представляет собой функцию, которая может зависеть от *произвольного* количества переменных.

Минимальный и самый простой вариант – это давно знакомая сложная функция $u=f(v_1(x))$ одной переменной, **производную которой** мы научились находить в прошлом семестре. Навыками дифференцирования функций $u=f(v_1(x;y)),\quad u=f(v_1(x;y;z))$ вы тоже обладаете *(взгляните на те же функции* $u=\sin(xy),\quad u=\sqrt{xyz}$ *).*

Таким образом, сейчас нас будет интересовать как раз случай $n>1$. По причине великого разнообразия сложных функций общие формулы их производных имеют весьма громоздкий и плохо усваиваемый вид. В этой связи я ограничусь конкретными примерами, из которых вы сможете понять общий принцип нахождения этих производных:

Пример 1

Дана сложная функция $u=\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$, где $x=\sin t,\ y=\cos t$. Требуется: 1) найти её производную и записать полный дифференциал 1-го порядка; 2) вычислить значение производной при $t_0=\frac{\pi}{4}$.

Решение: во-первых, разберёмся с самой функцией. Нам предложена функция, зависящая от x и y, которые в свою очередь **являются функциями** одной переменной: $u=f(x(t);y(t))$

Во-вторых, обратим пристальное внимание на само задание – от нас требуется найти **производнУЮ**, то есть, речь идёт вовсе не о частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, которые мы привыкли находить! Так как функция $u = f(x(t); y(t))$ фактически зависит только от одной переменной, то под словом «производная» подразумевается полная производная $\frac{du}{dt}$. Как её найти?

Первое, что приходит на ум, это прямая подстановка и дальнейшее дифференцирование. Подставим $x = \sin t, y = \cos t$ в функцию $u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$: $u = \frac{\sin t}{\cos t} - \frac{\cos t}{\sin t} = tgt - ctgt$, после чего с искомой производной никаких проблем:

$$\frac{du}{dt} = (tgt - ctgt)'_t = \frac{1}{\cos^2 t} - \left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right) = \frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{\sin^2 t}$$

И, соответственно, полный дифференциал: $du = \left(\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{\sin^2 t}\right)dt$

Это решение математически корректно, но маленький нюанс состоит в том, что когда задача формулируется так, как она сформулирована – такого варварства от вас никто не ожидает =) А если серьёзно, то придраться тут действительно можно. Представьте, что функция $u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ описывает полёт шмеля, а вложенные функции $x(t); y(t)$ меняются в зависимости от температуры. Выполняя прямую подстановку $x = \sin t, y = \cos t$, мы получаем лишь *частную информацию* $u^* = tgt - ctgt$, которая характеризует полёт, скажем, только в жаркую погоду. Более того, если человеку не сведущему в шмелях предъявить готовый результат $u^* = tgt - ctgt$ и даже сказать, что это за функция, то он так ничего и не узнает о фундаментальном законе $u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ полёта!

Вот так вот совершенно неожиданно брат наш жужжащий помог осознать смысл и важность универсальной формулы: $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$

Привыкайте к «двухэтажным» обозначениям производных – в рассматриваемом задании в ходу именно они. При этом следует быть **очень аккуратным** в записи: производные с прямыми значками «дэ» – это **полные производные**, а производные с округлыми значками ∂ – это **частные**

производные. С последних и начнём:
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{y}\cdot(x)'_x-y\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'_x=\frac{1}{y}\cdot 1-y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)'_y=x\cdot\left(\frac{1}{y}\right)'_y-\frac{1}{x}\cdot(y)'_y=x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)-\frac{1}{x}\cdot 1=-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}$$

Ну а с «хвостами» вообще всё элементарно: $\frac{dx}{dt}=(\sin t)'_t=\cos t$, $\frac{dy}{dt}=(\cos t)'_t=-\sin t$

Подставим найденные производные в нашу формулу:
$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}\right)\cdot\cos t+\left(-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right)\cdot(-\sin t)$$

Когда функция изначально предложена в замысловатом виде, то будет логичным *(и тому дано объяснение выше!)* оставить в таком же виде и результаты:
$$\frac{du}{dt}=\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}\right)\cos t+\left(-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right)\cdot(-\sin t)$$
$$du=\left[\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}\right)\cos t+\left(-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right)\cdot(-\sin t)\right]dt$$

При этом в «навороченных» ответах лучше воздержаться даже от минимальных упрощений *(тут, например, напрашивается убрать 3 минуса)* – и вам работы меньше, и ~~мохнатый друг доволен~~ рецензировать задание проще.

Однако не лишней будет черновая проверка. Подставим $x=\sin t,\ y=\cos t$ в найденную производную и проведём упрощения:
$$\frac{du}{dt}=\left(\frac{1}{\cos t}+\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)\cos t+\left(-\frac{\sin t}{\cos^2 t}-\frac{1}{\sin t}\right)(-\sin t)=1+\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+1=$$
$$=1+tg^2 t+ctg^2 t+1=\frac{1}{\cos^2 t}+\frac{1}{\sin^2 t}$$
(на последнем шаге использованы ***тригонометрические формулы*** $tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, $ctg^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$*)*

В результате получен тот же результат, что и при «варварском» методе решения.

Вычислим производную в точке $t_0=\frac{\pi}{4}$. Сначала удобно выяснить «транзитные» значения *(значения функций* $x=\sin t,\ y=\cos t$*)*:
$$x\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}};$$
$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Теперь оформляем итоговые расчёты, которые в данном случае можно выполнить по-разному. Использую интересный приём, в котором 3 и 4 «этажа» упрощаются не по **обычным правилам**, а преобразуются как частное двух чисел:

$$\frac{du}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(-\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=1+1+1+1=4$$

И, конечно же, грех не проверить по более компактной записи $\frac{du}{dt}=\frac{1}{\cos^2 t}+\frac{1}{\sin^2 t}$:

$$\frac{du}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{2}}=2+2=4$$

Ответ:

1) $$\frac{du}{dt}=\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}\right)\cos t+\left(-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right)\cdot(-\sin t);$$

$$du=\left[\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}\right)\cos t+\left(-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right)\cdot(-\sin t)\right]dt;$$

2) $$\frac{du}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right)=4$$

Бывает, что задача предлагается в «полуобщем» виде:

«Найти производную функции $u=f(x;y)$ *, где* $x=\sin t,\ y=\cos t$ *»*

То есть «главная» функция не дана, но её «вкладыши» вполне конкретны. Ответ следует дать в таком же стиле:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos t+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot(-\sin t)=\frac{\partial u}{\partial x}\cos t-\frac{\partial u}{\partial y}\sin t$$

Более того, условие могут немного подшифровать:

«Найти производную функции $u=f(\sin t;\cos t)$ *»*

В этом случае нужно **самостоятельно** обозначить вложенные функции какими-нибудь подходящими буквами, например, через $v_1=\sin t,\ v_2=\cos t$ и воспользоваться той же формулой:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{dv_1}{dt}+\frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{dv_2}{dt}=\frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\cos t+\frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot(-\sin t)=\frac{\partial u}{\partial v_1}\cos t-\frac{\partial u}{\partial v_2}\sin t$$

К слову, о буквенных обозначениях. Я уже неоднократно призывал не «цепляться за буквы», как за спасательный круг, и сейчас это особенно актуально! Анализируя различные источники по теме, у меня вообще сложилось впечатление, что авторы «пошли вразнос» и стали безжалостно бросать студентов в бурные пучины математики =) Так что уж простите:))