IKKITA BELGILI O'ZGARUVCHLAR UCHUN BINOMIYAL TAQSIMOT YORDAMIDA QURILGAN KVADRATIK STOXASTIK OPERATORLAR

M.A.Sharapova
QarDU professori

O.Sh.Xurramov
QarDU o'qituvchisi

Annotatsiya. Agar Avloddan avlodga o'tish qoidalari Mendel qoidalarini qanoatlantirsa, bu qoidalar yordamida qurilgan kvadratik operatorlar Mendel kvadratik operatorlar deyiladi. Bir nechta kvadratik operatorlar yordamida qurilgan modellarni qaraymiz.

Kalit so'zi: Kvadratik stoxastik operator. Graflar. Allel. Genotiplar. Mendel kvadratik operatorlar. Simpleks.

Faraz qilaylik (Λ, L) karrali qirrasiz davriysiz chekli graf bo'lsin. Bu yerda Λ - grafning uchlari to'plami va L-qirralar to'plamidir.

Φ - esa allellar to'plami deb ataluvchi qandaydir chekli to'plam bolsin. Akslantirish $\sigma : \Lambda \to \Phi$ katak deb ataladi. Ω- orqali hamma kataklar fazosini belgilaymiz va $S(\Lambda, \Phi)$ to'plamм Ω chekli to'plamda berilgan hamma ehtimolli taqsimotlar to'plami. $S(\Lambda, \Phi)$ simpleksni o'zini o'ziga akslantiruvchi kvadratik stoxastik operator quydagi ko'rinishda aniqlanadi. Λ_i -lar (Λ, L) ,grafning hamma bog'liq bo'laklari to'plamidir, i=1,2,3,…,n. Ixtiyoriy ikkita katak uchun $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega$

$$A(\sigma_1,\sigma_2) = \{x \in \Lambda : \sigma_1(x), \sigma_2(x)\} \text{ va } \hat{A}(\sigma_1,\sigma_2) = U_{j:\hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)\cap\Lambda_j \neq \varnothing} \Lambda_j$$

Agar $\hat{A}(\sigma_1,\sigma_2) \neq \varnothing$ bo'lsa, u holda $\Omega\left(\Lambda, \hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)\right) = \left\{\sigma \in \Omega : \sigma_{\hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_{1\hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)} \text{ } yoki \, \sigma_{\hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_{2\hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)}\right\}$, $\hat{A}(\sigma_1,\sigma_2) \neq \varnothing$ bo'lgan hol uchun

$$\Omega\left(\Lambda, \hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)\right) = \left\{\sigma \in \Omega : \sigma_{\Lambda_j} = \sigma_{1_{\Lambda_j}} \text{ } yoki \, \sigma_{\Lambda_j} = \sigma_{2_{\Lambda_j}, \, j=1,2,\ldots,n.}\right\},$$

Faraz qilaylik $\mu \in S(\Lambda, \Phi)$- Ω da aniqlangan $\mu(\sigma) > 0$ shartni qanoatlantiruvchi qandaydir ehtimolli o'chov bo'lsin. ixtiyoriy $\sigma \in \Omega$ katak uchun avloddan avlodga o'tish koeffisenti $P_{\sigma_1\sigma_2,\sigma}$ ni quydagicha aniqlaymiz:

$$p_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = \begin{cases} \dfrac{\mu(\sigma)}{\mu\left(\Omega\left(\Lambda, \hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)\right)\right)} \; agar \; \sigma = \sigma_1 \; yoki \; \sigma = \sigma_2 \\ 0 \quad qolgan \; hollar \; uchun \end{cases} \qquad (1)$$

$S(\Lambda,\Phi)$ simpleksda harakat qiluvchi berilgan Avloddan avlodga o'tish (1) koeffisenti yordamida qurilgan kvadratik stoxastik operator V quydagicha aniqlanadi: ixtiyoriy $\lambda \in S(\Lambda, \Phi)$ o'lchov uchun $V\lambda = \lambda' \in S(\Lambda,\Phi)$ o'lchov ixtiyoriy katak $\sigma \in \Omega$ uchun

$$\lambda'(\sigma) = \sum_{\sigma_1,\sigma_2\in\Omega} P_{\sigma_1\sigma_2,\sigma}\lambda(\sigma_1)\lambda(\sigma_2) \qquad (2)$$

tenglik orqali ifodalanadi.

Hech qanday qiyinchiliksiz avloddan avlodga o'tish koeffisenti quydagi shartlarni qanoatlantirishini ko'rish mumkin:

$P_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} \geq o$, $\sum_{\sigma\in\Omega} P_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = 1$ yoki $\mathrm{P}_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = \mathrm{P}_{\sigma_2\sigma_1,\sigma}$ hamma $\sigma_1,\sigma_2,\sigma \in \Omega$ lar ushun.

Avloddan avlodga o'tish koeffisenti (2) (Λ, L) grafning strukturasi, allellar to'plami (spenlar) Φ va μ o'lchovning tanlanishiga bog'liq boladi.

Ta'rif. 1. Kvadratik operator (2) Volterro kvadratik operator deyiladi, agarda avloddan avlodga o'tish koeffisenti qo'ydagicha aniqlangan bo'lsa:

$$p_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = \begin{cases} \neq 0, \; agar \; \sigma \in \Omega\left(\Lambda, \hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)\right) \\ 0 \quad qolgan \; hollar \; uchun \end{cases} \qquad (3)$$

Teorema 1.Agar $|\Phi| > 1$ va $|\Lambda| > 1$ bo'lganda (3.) kvadratik stoxastik operator Voltero tipidagi kvadratik stoxastik operator bo'lishi uchun (Λ, L) -graf bog'liq graf bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Faraz qilaylik (Λ, L) -graf bog'liq graf bo'lsin: Agar $A(\sigma_1,\sigma_2) = \Lambda$ bo'lsa, u hold o'z-o'zidan ma'lumki, $\Omega(\Lambda, \tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2)) = \{\sigma_1\}$ bo'ladi. Agar $A(\sigma_1,\sigma_2) \neq \Lambda$ bo'lsa va $A(\sigma_1,\sigma_2) \neq \varnothing$ bo'lsa, u holda $\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2) = \Lambda$ bo'ladi, bu erdan $\Omega(\Lambda, \tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2)) = \{\sigma_1,\sigma_2\}$ ekanligi kelib chiqadi. oxirida, agar $\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2) \neq \varnothing$ bo'lsa, u holda girafning bog'liqligidan $\Omega(\Lambda, \tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2)) = \{\sigma_1,\sigma_2\}$ ekanligi kelib chiqadi, bundan esa $\sigma \neq \sigma_1, \sigma \neq \sigma_2$ lar uchun $P_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = 0$ dir, yaniunga mos keluvchi kvadratik stoxastik operator Voltero tipidagi kvadratik stoxastik operator bo'lishi kelib chiqadi.

Endi faraz qilaylik kvadratik stoxastik operator Voltero tipidagi kvadratik stoxastik operator bo'lsin. U holda bo'ndan ixtiyoriy σ_1,σ_2 lar uchun μ o'lchov musbat zichlikka ega bo‘ladi va $\Omega(\Lambda,\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2))=\{\sigma_1,\sigma_2\}$ ekanligiga, bu esa (Λ,L) grafning bog‘liqligini ko‘rsatadi.

Teorema isbot bo‘ldi.

$\sigma(x)$ larning mumkin bo‘lgan qeymatlari va statika mexanika masalalaidan Φ fazoning ko‘rinishini mumkin qadar soddalashtirish yoki qeyinlashtirish mumkin. Biologik adabiyotlardan shu narsa ma’lumki, ixtiyoriy gen allellarning xal xil ko‘rinishda mavjud bo‘lishi mumkin. Populyatsiyada A allelni ”normal” yoki “sakroq” deb ataluvchi tipdagisiga kengaytiramiz, qolgan formalari mutant α allellar sifatida qaraladi

Faraz qilaylik $|\Lambda|=n$ va $\Phi=\{A,\alpha\}$ bo‘lsin. Ixtiyoriy katak $\sigma\in\Omega$ uchun σ katakdagi(yani “yutuqlar” soni) A allellar sonini $n_A(\sigma)$ -orqali belgilaymiz va μ_α o‘lchovni Ω da xuddi binomiyal taqsimot kabi beramiz:

$$\mu_\alpha(\sigma)=p^{n_A(\sigma)}q^{n-n_A(\sigma)} \qquad (1)$$

Bu yerda $p\geq 0$, $q\geq 0$ $p+q=1$ va $p/q=\alpha$ dir. Agar $p=q$ bo‘lganda,ya’ni $\alpha=1$ bo‘lganda, o‘lchov μ_1 Ω da normal taqsimotga aylanadi. Faraz qilaylik (Λ,L)- grafning qirralari to‘plami bo‘sh to‘plam bo‘lsin, yani Λ tutash chziqlarni ozida saqlamasin. Bu holda $n_A(\sigma_1)=n_A(\sigma_2)$ shartni qanoatlantiruvchi $\sigma_1$va σ_2 kataklarni solishtirib $\Omega=\left\{\alpha_1^{'},\alpha_2^{'},...,\alpha_k^{'}\right\}$ bu yerda $\alpha_i-n_A(.)=i$ shartni qanoatlantiruvchi kataklar to‘plami kataklar fazosini hosil qilamiz. Bu yerda taqsimot quydagicha aniqlanadi:

V - operator berilga bo‘lsin $S(\Omega)=\{x=(x_1,x_2,...,x_n):x_i\geq 0,\ \text{i}=\overline{0,n},\ \sum_{i=1}^{n}x_i=1\}$

simpleksda harakat qiluvchi kvadratik stoxastik operator bo‘lsin.

Agar Avloddan avlodga o‘tish qoidalari Mendel qoidalarini qanoatlantirsa, bu qoidalar yordamida qurilgan kvadratik operatorlar Mendel kvadratik operatorlar deyiladi. Bir nechta kvadratik operatorlar yordamida qurilgan modellarni qaraymiz.

Ko‘riladigan misollarning hammasida $p=q=1/2$ bo‘lib, unga mos keluvchi graf qirrasiz $|\Lambda|$=n grafdir.

Faraz qilaylik x_1,x_2 va x_3 chastotalar $x=(x_1,x_2,x_3)\in S^2$- mos ravishda AA, Aa, aa genotiplarning chastotalari bo‘lsin.

$P_{AAAA,AA}$-AAAA genotipli ота onadan bolasiga AA genotip o‘tish ehtimolidir

$P_{AAAa,AA}$-AAAα genotipli ота onadan bolasiga AA genotip o‘tish ehtimolidir

$P_{AAaa,AA}$-AAα α genotipli ота onadan bolasiga AA genotip o‘tish ehtimolidir

$P_{Aaaa,AA}$-Aα α α genotipli ота onadan bolasiga AA genotip o‘tish ehtimolidir

$P_{aaaa,AA}$-α α α α genotipli ота onadan bolasiga AA genotip o‘tish ehtimolidir

va hakozo $P_{...,aa} = 1 - P_{...,AA} - P_{...,Aa}$

Mendel tipidagi avloddan avlodga o‘tishda Qiyin bo‘lmagan hissoblashlarni bajarish uchun genotiplarni qisqartirish maqsadida AA, Aa, aa larni mos ravishda 1, 2, 3 sonlar orqali belgilaymiz va bunga mos keluvchi kvadratik stoxastik operator $\{p_{ij,k}\}_{i,j,k=1}^{3}$ quydagi ko‘rinishga keladi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Bu jadvaldagi qeymatlarni (2) ga quysak

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_1x_2 + 1/4x_2^2 \\ x_2' = x_1x_2 + 1/2x_2^2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 \\ x_3' = 1/4x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 \end{cases}$$

ni olamiz va uni soddalashtirib

$$\begin{cases} x_1' = (x_1 + 1/2x_2)^2 \\ x_2' = 2(x_1 + 1/2x_2)(x_3 + 1/2x_2) \\ x_3' = (x_3 + 1/2x_2)^2 \end{cases}$$

(2) ni hosil qilamiz.

Avloddan avlodga o‘tishning keying chastotasini aniqlash uchun (2) ga x_1, x_2, x_3 larning o‘rniga mos ravishda x_1', x_2', x_3' larni x_1', x_2', x_3' larning o‘rniga x_1'', x_2'', x_3'' larni quyesh zarur, yani quydagi tenglamani olamiz

$$\begin{cases} x_1'' = (x_1' + 1/2x_2')^2 \\ x_2'' = 2(x_1' + 1/2x_2')(x_3' + 1/2x_2') \\ x_3'' = (x_3' + 1/2x_2')^2 \end{cases}$$

va yana x_1', x_2', x_3' larning o‘rniga (2)ning qiymatini qo‘ysak

$$\begin{cases} x_1'' = ((x_1 + 1/2x_2)^2 + (x_1 + 1/2x_2)(x_3 + 1/2x_2))^2 \\ x_2'' = 2((x_1 + 1/2x_2)^2 + (x_1 + 1/2x_2)(x_3 + 1/2x_2)) \cdot \\ \cdot((x_3 + 1/2x_2)^2 + (x_1 + 1/2x_2)(x_3 + 1/2x_2)) \\ x_3'' = ((x_3 + 1/2x_2)^2 + (x_1 + 1/2x_2)(x_3 + 1/2x_2))^2 \end{cases}$$

va bu formulani soddalashtirsak

$$\begin{cases} x_1'' = (x_1 + 1/2x_2)^2 \\ x_2'' = 2(x_1 + 1/2x_2)(x_3 + 1/2x_2) \\ x_3'' = (x_3 + 1/2x_2)^2 \end{cases}$$ ga ega bo'lamiz.

Bu yerdan ko'rinadiki avloddan avlodga o'tishning keyingi keladigan bosqichlaridagi genotip chastotalari xuddi birinchi bosqichdagi kabi bo'lar ekan. Bu xossani quydagi tasdiq ko'rinishida yozamiz.

Tasdiq 2. Avloddan avlodga o'tishda genotip chastotasining o'zgarmasligi bitta bosqichdan keyin amalga oshar ekan.

chastotalarining o'zgarmasligi Xardi- Vaynbergning qonunlarining uchunchi tasdig'dir.

(2) munosabatdan ko'rinadiki (0;1;0) no'qtaning asli bush to'plamdir, bundan kelib chiqadiki bu kvadratik stoxastik operator suyr'ektiv akslantirish emas.

Adabiyotlar

1. Колмогоров А.Н.,Основные понятые теории вероятностей. М,1936,138 с.
2. Гардинер К.В. Стохастические методы вестественных науках. М.: Мир. 1986,. 528 с.
3. Биллингслей П.Эргодическая теория и информация. М: Мир,1969, 238 с. Макаров И.П. Дополнительные главы математического анализа.
4. М., Просвещение, 1968.-308 с.
5. Сарымсаков Т.А., Ганиходжаев Р.Н. Центральная предельнаятеоремадля квадратичных цепей.//УзМЖ, 1991.№И, с.57-64.
6. Мейлиев Х.Ж.,ГуломовО.Х.(Кар ГУ)Квадратичные стохастические опеораторы, построенные по биномиальным распределениям.
7. J.I. Abdullayev, R.N. G'anixo'jayev, M.H. Shermatov, O.I.Egamberdiyev. «Funksional analiz». Toshkent – Samarqand - 2009. -424 bet.