O'ZGARMAS KOEFFITSIYENTLI BIR JINSLI CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMANI YECHISH USULLARI

Запаров Зиядилла Абдумаликович
Andijon qishloq xo'jaligi va agrotexnologiyalar instituti katta o'qituvchisi,
ziyodulla19662410@gmail.com

Annotatsiya. Maqolada matematika fanining asosiy tushunchalaridan biri bo'lgan differensial tenglama tushunchasini talabalarga sodda usullarda o'rgatib boriladi. Differensial tenglama turlari va ularni yechishning bir necha usullari to'g'risida fikr yuritiladi.

Kalit so'zlar: Chiziqli erkli funksiyalar, differensial tenglama, uning tartibi, turlari, xarakteristik tenglama, xususiy yechim, umumiy yechim.

Аннотация. В статье простыми способами преподается понятие дифференциального уравнения, которое является одним из основных понятий математики. Рассмотрены типы дифференциальных уравнений и несколько методов их решения.

Ключевые слова: Линейные произвольные функции, дифференциальное уравнение, его порядок, виды, характеристическое уравнение, частное решение, общее решение.

Annotation. In the article, the concept of differential equation, which is one of the main concepts of mathematics, is taught to students in simple ways. Types of differential equations and several methods of solving them are considered.

Keywords: Linear arbitrary functions, differential equation, its order, types, characteristic equation, particular solution, general solution.

Kirish.

Quyidagi

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+..+ a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \qquad (1)$$

ko'rinishdagi tenglama n-tartibli chiziqli, o'zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglama deyiladi, bunda

$a_0, a_1,..,a_{n-1},a_n$ – o'zgarmas miqdorlar, $a_0 \neq 0$.

Agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa, bir jinsli bo'lmagan tenglama,

agar $f(x) = 0$ bo'lsa, bir jinsli tenglama deyiladi.

Quyidagi muloxazalar o'rinlidir:

1) Agar y_1 va y_2 lar chiziqli erkli funksiyalar bo'lib 2- tartibli bir jinsli chiziqli

$$y''+ a_1y'+a_2y=0 \qquad (2)$$

differensial tenglamaning xususiy yechimlari bo'lsa, u xolda $y=y_1+y_2$ ham shu tenglamaning yechimi bo'ladi.

2) Agar y (2) tenglamaning yechimi bo'lsa , u xolda cy ham shu tenglamaning yechimi bo'ladi.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYA

Chiziqli erkli yechimlar haqida:

Agar $x \in$[a,b] da (2) tenglamaning 2 ta yechimining nisbati o'zgarmas miqdorga teng bo'lmasa, ya'ni

$$\frac{y_1}{y_2} \neq const$$

bo'lsa y_1 va y_2 yechimlar $x \in$[a,b] da chiziqli erkli yechimlar deyiladi, aks xolda chiziqli bog'liq yechimlar deyiladi.

Ta'rif

$$W(y_1, y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

ko'rinishdagi determinant Vronskiy determinanti deyiladi.

MUHOKAMA VA NATIJALAR

Quyidagi tasdiqlar o'rinlidir:

1) Agar y_1 va y_2 yechimlar $x \in$[a,b] da chiziqli bog'liq bo'lsa,u xolda bu kesmada Vronskiy determinanti nolga teng.

2) Agar (2) tenglama yechimlaridan tuzilgan $W(y_1, y_2)$ - Vronskiy determinanti tenglama koeffitsiyentlari uzluksiz bo'lgan [a,b] kesmadagi biror $x=x_0$ qiymatida nolga teng bo'lmasa, u xolda $W(y_1,y_2)$ bu kesmada nolga aylanmaydi.

Isbot

y_1 va y_2 (2) tenglamaning yechimlari bo'lsin. U holda

$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0$, $y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0$. bo'ladi.

Birinchi tenglikni y_2 ga, ikkinchi tenglikni y_1 ga kupaytirib, ayiramiz:

$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + a_1(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0$ (3)

$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$ dan $W_x(y_1, y_2) = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$ xosil bo'ladi. Demak, (3) tenglama $W_x + a_1 W = 0$ ko'rinishni oladi. Bu tenglamaning $W|_{x=x_0} = W_0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimini topamiz:

$$\frac{dW}{dx} = -a_1 W, \qquad \frac{dW}{W} = -a_1 dx,$$

$$\ln W = -\int_{x_0}^{x} a_1 dx + \ln C,$$

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)dx} \qquad (4)$$

(4) formula Livuill formulasi deyiladi.

$W|_{x=x_0} = W_0$ boshlang'ich shartdan $C = W_0$ ni topamiz. Demak,

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)dx} \qquad (5)$$

$W_0 \neq 0$, bu xolda (5) dan x ning xech bir qiymatida $W \neq 0$ ekanligi kelib chiqadi.

3) Agar (2) tenglamaning y_1 va y_2 yechimlari chiziqli erkli bo‘lsa , bu yechimlardan tuzilgan $W(y_1,y_2)$ - Vronskiy determinanti xech bir nuqtada nolga aylanmaydi.

(2) tenglamani integrallashga kirishamiz. Yuqoridagi tasdiqqa ko‘ra bu tenglamaning umumiy yechimi uning 2ta chiziqli erkli xususiy yechimlari yig‘indisidan iborat.

Xususiy yechimni

$$y = e^{kx}, \qquad \text{k-const}$$

ko‘rinishda izlaymiz: $y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}$.

Xosilalarni (2) ga qo‘yib

$(k^2 + a_1 k + a_2)e^{kx} = 0$

yoki

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \qquad (6)$$

tenglamani xosil qilamiz.

Bu tenglama (2) tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

$$k_1 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2},$$
$$k_2 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

berilgan (6) xarakteristik tenglamaning ildizlari bo‘lsin.

1. Xarakteristik tenglamaning ildizlari k_1 va k_2 haqiqiy va xar xil sonlar bo‘lsin. Bu xolda

$$y_1 = e^{k_1 x} \text{ va } y_2 = e^{k_2 x}$$

funksiyalar xususiy yechimlar bo‘ladi.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const$$

bo‘lgani uchun ular chiziqli bog‘liq emas.

Demak, umumiy yechim

$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$. ko‘rinishda bo‘ladi.

Misol.

$y'' + y' - 2y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish.

Bu tenglamaning xarakteristik tenglamasini yozamiz:

$k^2 + k - 2 = 0$

Uni yechib, $k_1=1$ va $k_2=-2$ topib, quyidagi umumiy yechimni hosil qilamiz:

$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$.

2. Xarakteristik tenglamaning ildizlari k_1 va k_2 haqiqiy va teng sonlar bo'lsin: $k_1=k_2$.

$$\text{Bu xolda} \quad k_1 = k_2 = -\frac{a_1}{2}.$$

Bitta hususiy yechim ma'lum

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{-\frac{a_1}{2}x}$$

Ikkinchi xususiy yechimni $y_2 = u(x)e^{k_1 x}$ shaklda izlaymiz:

$$y_2' = (u'(x) + k_1 u(x))e^{k_1 x},$$

$$y_2'' = (u''(x) + 2k_1 u'(x) + k_1^2 u(x))e^{k_1 x}.$$

Bularni (2) ga qo'yib va soddalashtirib

$$(u''(x) + (2k_1 + a_1) u'(x) + (k_1^2 + k_1 a_1 + a_2) u(x))e^{k_1 x} = 0$$

tenglamani hosil qilamiz.

$k_1 = -\frac{a_1}{2}$ bo'lganda $2k_1 + a_1 = 0$ va k_1- xarakteristik tenglama karrali ildizi bo'lganidan

$$u''(x) e^{k_1 x} = 0 \quad \text{yoki} \quad u''(x) = 0.$$

Uni integrallab $u(x) = Ax + B$ ni xosil qilamiz.

Xususiy xolda, $A=1$ va $B=0$ deb olish mumkin: $u(x)=x$.

Demak, ikkinchi xususiy yechim $y_2 = xe^{k_1 x}$ ko'rinishda bo'ladi.

Demak, bu xolda umumiy yechim

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{k_1 x}$$

ko'rinishida bo'ladi.

3. Xarakteristik tenglamaning ildizlari k_1 va k_2 kompleks sonlar bo'lsin:

$$k_1 = \alpha + i\beta \ , k_2 = \alpha + i\beta ,$$

$$\alpha = -\frac{a_1}{2}, \beta = \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}\ .$$

Xususiy yechimlarni

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \text{ va } y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$$

shaklida yozish mumkin.

Xulosa. Quyidagi natijadan foydalanamiz: agar haqiqiy koeffitsiyentli bir jinsli chiziqli tenglamaning xususiy yechimi kompleks funksiyalardan iborat bo'lsa, u holda uning haqiqiy va mavxum qismlari xam shu tenglamaning yechimi bo'ladi.

Demak, xususiy yechim

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

bo'lgani uchun $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ lar (2) tenglamaning yechimlari bo'ladi.

Umumiy yechim esa

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$$

ko'rinishda bo'ladi.

Misol.

$y'' - 4y' + 7y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish.

Bu tenglamaning xarakteristik tenglamasini yozamiz:

$$k^2 - 4k + 7 = 0.$$

Uni yechib, $k_1 = 2 + i\sqrt{3}$ va $k_2 = 2 - i\sqrt{3}$ topib , umumiy yechimni xosil kilamiz:

$$y = e^{2x}(c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x)).$$

References

1. Z.Zaparov, R.Jo'raqulov – "O'qitishda tajribalar: Soddalik va qiziqarlilik" ACADEMIC RESEARCH IN EDUCATIONAL SCIENCES VOLUME 2 | ISSUE 2 | 2021, 700-706 betlar.
2. БА Кулматова, ДА Буранова, ЗА Запаров.- Способы защиты от интернет-мошенничества, Научно-методический журнал Academy 2019 г 78-80 ст.
3. З.Запаров., Б.Эгамбердиева «Адаптивная система обучения» Перспективы развития науки и образования в современных экологических условиях с. Соленое займище, 18–19 мая 2017 года. 1054-1056 ст.

4. Jo „raqulov, R.(2021). O „qitishda tajribalar: soddalik va qiziqarlilik
5. Z Zaparov
6. Academic Research in Educational Sciences 2 (2), 700-706
7. O.Abduraxmonov "Ko'p yadroli protsessorda kubik bazisli splaynlar asosida parallel algoritmlarni amalga oshirish tuzilmasini ishlab chiqish" Academic Research In Edicational Sciences Scientific Journal // Vol.2,Issue3.,Pages: 628-633,2021 y.