DIFFERENTSIAL-FUNKTSIONAL TENGLAMALAR

Haydarov Muhammadjon Alijonovich
Andijon qishloq xo'jaligi va agrotexnalogiyalar instituti o'qituvchisi
mahhayredmi9@gmail.com

Annotatsiya. Maqolada o'zgarmas koeffitsientli tenglamaning yechimini mavjudligi va yagonaligi, hamda boshlang'ich qiymat yoki funktsiyaga bog'liqligi haqidagi tushunchalar to'la ma'noda o'rganilgan. Bruvy qatorlarini o'zgarmas va o'zgaruvchi koeffitsiyentli, chiziqli, bir jinssiz yoki bir jinsli differentsial-funktsional tenglamalarning yechimini aniqlashdagi tadbiqi bo'lib hisoblanadi.

Аннотация. В статье полностью изучены понятия существования и единственности решения уравнения с постоянными коэффициентами, а также зависимости от начального значения или функции. Ряды Бруви рассматриваются как приложение для решения линейных, неоднородных или однородных дифференциально-функциональных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами.

Annotation. In the article, the concepts of the existence and uniqueness of the solution of the equation with constant coefficients, as well as the dependence on the initial value or function, are fully studied. Bruvy series is considered as an application in determining the solution of linear, inhomogeneous or homogeneous differential-functional equations with constant and variable coefficients.

Kalit so'zlar: differenatsial-funktsional tenglama, haqiqiy sonlar maydoni, Stiltiyes integrali, matritsali funksiya, chekli ayirmali differentsial.

Ключевые слова: дифференциально-функциональное уравнение, поле действительных чисел, интеграл Стилтиса, матрица-функция, конечно-разностный дифференциал.

Keywords: differential functional equation, field of real numbers, Stilthies integral, matrix function, finite difference differential.

Ta'rif.1.1. Quyidagi ko'rinishda berilgan tenglikka, mos ravishda, chekli ayirmali differentsial va differenatsial-funktsional tenglama deyiladi:

$$\dot{X}(t)=F(t,X(t),X(t-r_1),\dots,X(t-r_n),\\ \dot{X}(t-\tau_1),\dot{X}(t-\tau_2),\dots,\dot{X}(t-\tau_m)) \tag{1.1}$$

va

$$\dot{X}(t)=F\left(t,\int_0^r X(t+\theta)d\xi(\theta),\int_0^\tau \dot{X}(t+\theta)d\eta(\theta,)\right) \tag{1.2}$$

bu yerda "•" belgi $\dot{X}(t)=\frac{dX(t)}{dt}$ ni bildiradi; r_i,τ_s,r va τ lar haqiqiy sonlar maydoni $-R$ ning qandaydir elementlaridan iborat bo'lib, barcha i va s lar uchun
$r_i\neq 0,\tau_s\neq 0,r\neq 0,\tau\neq 0,r_i\neq r_j,\tau_s\neq\tau_k$
$(i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,n;\ s=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,m)$ bo'lganda $i\neq j$ va $s\neq k$ bo'lishi o'rinli; $F-t,X(t),X(t-r_i),\dot{X}(t-\tau_s)$ yoki $X(t+\theta),\dot{X}(t+\theta)$ ga bog'liq bo'lgan matritsali funksiya yoki funktsionaldan iborat; $\int_0^r X(t+\theta)d\xi(\theta),\int_0^\tau \dot{X}(t+\theta)d\eta(\theta)-$ Stiltiyes integralini ko'rsatadi va $\int_0^\tau \dot{X}(t+\theta)d\eta(\theta)\neq\dot{X}(t);$ $X(t),F$ lar n chi tartibli ustun

$$X(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix},\qquad F=\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_n\end{bmatrix}$$

matritsalardan iborat; $R\ni t-$ihtiyoriy erkin parametr; $X(t)-$noma'lum funktsiya, $\int_0^\tau \dot{X}(t+\theta)d\eta(\theta)\neq\dot{X}(t)-$bajarilishi (1.2) ning $\dot{X}(t)$ ga nisbatan yechilganligini ko'rsatadi.

Ayrim hollarda, (1.1) yoki (1.2) ga n noma'lumli n ta, birinchi tartibli differentsial-funktsional tenglamalar sistemasini matritsa formadagi yozuvi ham deyiladi. Shuningdek, $F-$matritsali funktsiya, faqat, $X(t-r_i)$ va $\dot{X}(t-\tau_s)$ yoki $\int_0^r X(t+\theta)d\xi(\theta)$ va $\int_0^\tau \dot{X}(t+\theta)d\eta(\theta)$ ga nisbatan chiziqli bo'lsa, (1.1) yoki (1.2) ga chiziqli chekli ayirmali differentsial yoki differenatsial-funktsional tenglama deyiladi.

Ta'rif. 1.2. Quyidagi ko'rinishda berilgan tenglikka, mos ravishda, n chi tartibli chekli ayirmali differentsial va differentsial-funktsional tenglama deyiladi:

$$\begin{aligned}x^{(n)}(t)=G(t,x(t),x(t-r_1),\dots,x(t-r_n),\\ \dot{x}(t-\tau_1),\dot{x}(t-\tau_2),\dots,\dot{x}(t-\tau_m),\\ x^{(n)}(t-\nu_1),x^{(n)}(t-\nu_2),\dots,x^{(n)}(t-\nu_p))\end{aligned}\qquad(1.3)$$

va

$$x^{(n)}(t)=G\left(t,\int_0^r x(t+\theta)d\xi(\theta),\int_0^\tau \dot{x}(t+\theta)d\eta(\theta),\ldots,\int_0^\nu x^{(n)}(t+\theta)dl(\theta)\right), \tag{1.4}$$

bu yerda $\nu_p\in R,\nu_p\neq\nu_q\ (p=1,2,\ldots,l;\ q=1,2,\ldots,l);\ \dot{x}(t)=\frac{dx(t)}{dt},\quad x^{(n)}(t)=\frac{d^n x(t)}{dt^n};$ $\nu_p\in R$ va $\nu_p\neq 0;\ x(t)-$skalyar, noma'lum funktsiya, $N\ni n-$tenglamaning tartibidan iborat; $G-$skalyar funktsiya $t,x(t),x(t-r_i),\dot{x}(t),\dot{x}(t-\tau_s),\ldots,x^{(n-1)}(t),x^{(n)}(t-\nu_p)$ yoki $\int_0^r x(t+\theta)d\xi(\theta),\int_0^\tau \dot{x}(t+\theta)d\eta(\theta),\ldots,\int_0^\nu x^{(n)}(t+\theta)dl(\theta)$ larga bog'liq bo'lgan skalyar funktsional; $\int_0^\nu x^{(n)}(t+\theta)dl(\theta)\neq x^{(n)}(t)-$bo'lishi (1.4) ni $X^{(n)}(t)$ ga nisbatan yechilganligini ko'rsatadi.

Ta'rif (1.1) va (1.2) lar va ularga nisbatan ishlatiladigan elementar almashtirishlar yordamida quyidagi mulohazani bevosita tasdiqlash mumkin. Ya'ni (1.1) yoki (1.2) dan, (1.3) yoki (1.4) ga va aksincha, (1.3) yoki (1.4) dan, (1.1) yoki (1.2) ga to'g'ridan to'g'ri o'tish mumkin. Shuning uchun, (1.1) yoki (1.2) va (1.3) yoki (1.4) chekli ayirmali differentsial yoki differentsial-funktsional tenglamalarning hususiyatlarini o'rganish davrida, qaysi biri maqsadga muvofiq bo'lsa, shunisi olinib o'rganilaveriladi. Bundan buyon, asosan (1.1) va (1.3) tenglamalarga nisbatan tasdiqlanadigan mulohazalar ustida ko'proq to'htalamiz. Kerak bo'lgandagina (1.2) va (1.4) haqida fikr yuritamiz.

Ta'rif. 1.3. Agar (1.1) tenglamaning o'ng tomonida turgan funktsiyadagi $\dot{X}(t-\tau_1),\dot{X}(t-\tau_2),\ldots,\dot{X}(t-\tau_m)$ noma'lumlarning birortasiga ham F bog'liq bo'lmasa

(F da qatnashmasa) yoki u

$$\dot{X}(t)=F(t,X(t),X(t-r_1),\ldots,X(t-r_n)) \tag{1.5}$$

bo'lib, undagi $r_i>0\ (i=1,2,\ldots,n)$ bo'lsa, u holda (1.1) kechikkan tipdagi (kechikkan argumentli) differentsial-funktsional tenglama deyiladi. Shuningdek, $\dot{X}(t-\tau_1),\dot{X}(t-\tau_2),\ldots,\dot{X}(t-\tau_m)$ lardan kamida bittasiga F bog'liq bo'lib(F da qatnashib), $r_i>0$ va $\tau_s>0\ \ (i=1,2,\ldots,n;\ s=1,2,\ldots,m)$ bo'lsa, u holda (1.1) ga neytral tipdagi, r_i va τ_s larning ishoralari aniq ko'rsatilmagan bo'lsa, u holda (1.1) ga o'tuvchi tipdagi differentsial-funktsional tenglama deyiladi.

Ayrim hollarda, kechikkan, neytral, o'tuvchi tipdagi tenglamalarning biridan ikkinchisiga biror qonun yoki qoida asosida o'tish mumkin. Lekin, umumiy holda o'tish mumkin emas. Shuning uchun ham, ularning har biri alohida alohida o'rganiladi.

Yuqorida o'rganilgan, (1.1) yoki (1.2) chekli ayirmali differentsial yoki differentsial-funktsional tenglamalarda qatnashayotgan r_i, τ_s, ν_p yoki θ larning barchasini o'zgarmas son tariqasida faraz qilib kelindi.

Amaliyotda, ular:

$$r_i = r_i(t), \tau_s = \tau_s(t), \nu_p = \nu_p(t) \text{ yoki } \theta = \theta(t)$$

erkin $-t$ parametrga;

$$r_i = r_i(t, X(t)), \tau_s = \tau_s(t, X(t)),$$

$$\nu_p = \nu_p(t, X(t)) \text{ yoki } \theta = \theta(t, X(t))$$

erkin $-t$ parametr, noma'lum funktsiya $-X(t)$ ga;

$$r_i = r_i(t, X(t), X(t-a)), \tau_s = \tau_s(t, X(t), X(t-a)),$$

$$\nu_p = \nu_p(t, X(t), X(t-a)) \text{ yoki } \theta = \theta(t, X(t), X(t-a))$$

erkin $-t$ parametr, noma'lum funktsiya $-X(t), X(t-a)$ larga bog'liq va boshqa ko'rinishdagi tenglamalar ham o'rganiladi. Ularning hususiyatlariga qarab, tiplarga ajratiladi.

<u>**Ta'rif. 1.4**</u>. Agar (1.1) yoki (1.2) kechikkan argumentli differentsial yoki differentsial-funksional tenglamani

$$X(t) = \varphi(t) \qquad (1.6)$$

funktsiyani ayniyatga aylantirsa, u holda $\varphi(t)$-matritsa funktsiyaga, uning <u>bitta hususiy yechimi</u>, ihtiyoriy o'garmas n chi tartibli kvadrat $-C$ matritsa yordamida hosil qilingan

$$X(t) = \varphi(t; C)$$

funktsiyani ayniyatga aylantirsa, u holda $\varphi(t; C)$-matritsali funktsiyaga, uning <u>umumiy yechimi</u> deyiladi.

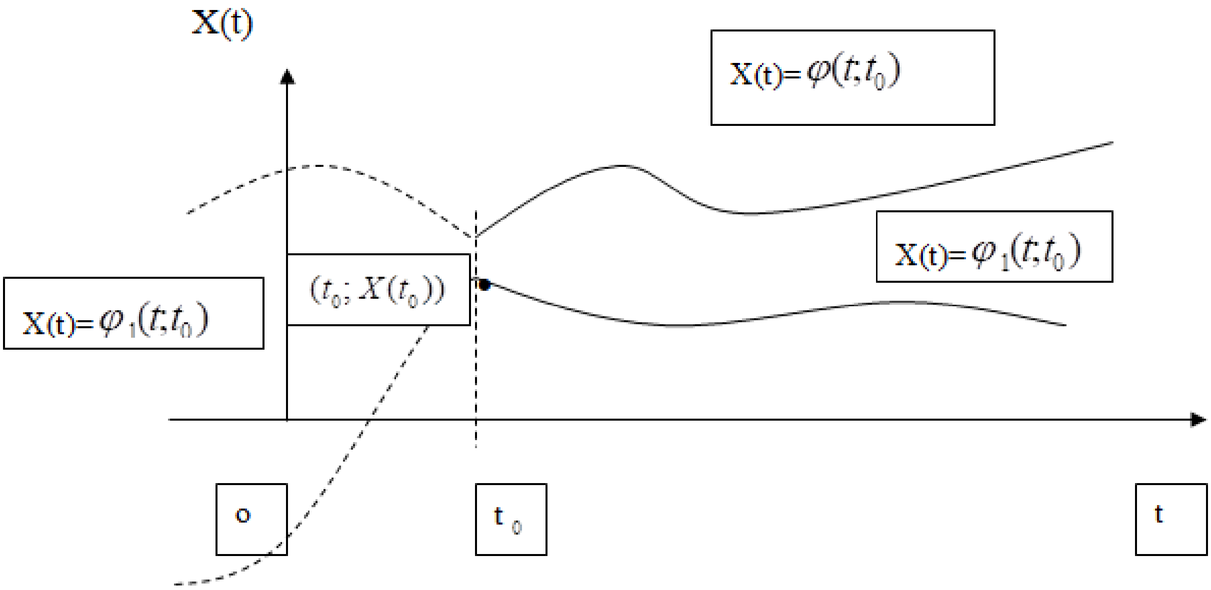
Berilgan, har qanday differentsial-funktsional tenglamaning xususiy yechimlari cheksiz ko'p bo'lishi mumkin. Lekin, uning umumiy yechimi o'zgarmas C ga nisbatan bitta bo'ladi. Ushbularni hisobga olgan holda, (1.1) yoki (1.2) ning yechimini mavjudligi va yagonaligi haqidagi tushunchalar o'rganiladi. Uning yechimi mavjud bo'lsa, unday yechimlarni topish (aniqlash) usullari keltirib chiqariladi.

1. (1.5) ko'rinishda berilgan, kechikkan argumentli differentsial-funksional tenglama uchun <u>Koshi masalasi</u> quyida shaklda qo'yiladi:

1) (1.5) tenglamaning $(t_0;\infty)$ da shunday $X(t)=\varphi(t;t_0)$ yechimini topish talab etiladiki, u yechim

$$\varphi(t_0;t_0)=X(t_0) \qquad (1.7)$$

shartni qanoatlantirsin. Bu masala, ayrim hollarda $(-\infty;t_0)$ yoki $(-\infty;\infty)$ oraliqlar uchun ham o'rganiladi. Umuman olganda, (1.5) tenglamaning (1.7) shartni qanoatlantiruvchi yechimi yagona emas yoki $(t_0;X(t_0))$ nuqtadan o'tuvchi va (1.5) tenglamani qanoatlantiruvchi $\varphi(t;t_0)$ matritsa funktsiyalar cheksiz ko'pdir. Xususiy holda yoki $X(t)$ – skalyar funktsiyadan iborat bo'lsa, u holda qaralayotgan masalani dekart koordinatalar sistemasida quyidagicha tasvirlanadi



2) $[r;t_0]$ ga tegishli bo'lgan t ning barcha qiymatlarida aniqlangan $p(t)$ matritsa funktsiyaga nisbatan, $(t_0;\infty)$ da (1.5) ning shunday $X(t)=\varphi(t;p(t))$ yechimini topish talab etiladiki, u yechim

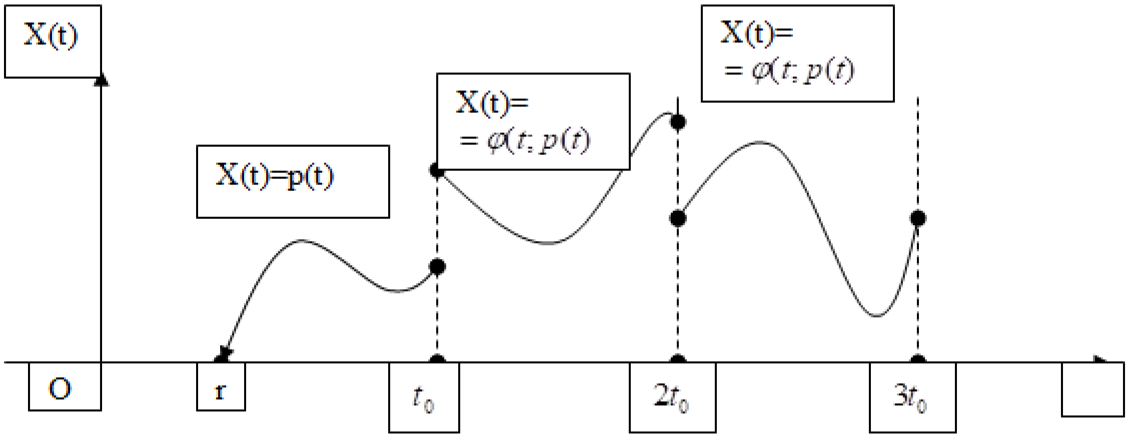
$$t\in[r;t_0]\rightarrow\varphi(t;p(t))=p(t) \qquad (1.8)$$

shartni qanoatlantirsin.

Bu masala asosid, (1.5) ning yechimini mavjud va yagonaligini tekshirish, asosan, $p(t)$ funktsiyani berilishiga bog'liq. $p(t)$ funktsiya, qaralayotgan oraliqda, chegaralanmagan, uzluksiz va uzluksiz hosilalarga ega bo'lganda ham (1.5) ning yechimi t_0 nuqtada va unga karrali bo'lgan barcha nuqtalarda birinchi tartibli uzilishga ega bo'lishi mumkin. Lekin, $p(t)$ ga qo'yilgan mahsus shartlar asosida $\varphi(t;p(t))$ yechimni (1.5) tenglama uchun mavjudligi va yagonaligini tasdiqlash mumkin va u yechim uzluksiz va uzluksiz hosilalarga ega bo'ladi.

ISSN: 2181-3558

Qo'yilgan masalani, $X(t)$ – skalyar funktsiyadan iborat bo'lganda, geometrik nuqtaiy nazardan quyidagi ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'ladi.



2. Neytral va o'tuvchi tipdagi differentsial-funktsional tenglamalar uchun ham 1. da ko'rilgan masalalarning aynan o'zi qo'yiladi. Lekin, berilgan tenglamaning qaralayotgan masala asosida yechimlarning mavjudligi va yagonaligini tasdiqlash o'ziga hosligi bilan ajralib turadi.

Umuman olganda, differentsial-funktsional tenglamalarga qo'yiladigan har bir masala, oddiy differentsial tenglamalarga qo'yiladigan masalalarga qiyoslash asosida olinadi. Bu yerda, shuni aytish lozimki, oddiy differentsial tenglama uchun qo'yilgan har bir masala (hoh boshlang'ich (Koshi masalasi), hoh chegaraviy masala bo'lsin), differentsial-funktsional tenglama uchun ham mazmunga ega bo'ladi. Lekin, differentsial-funktsional tenglama uchun qo'yilgan har bir masala, hamma vaqt ham oddiy differentsial tenglama uchun o'rinli bo'lavermaydi.

Yuqorida keltirilgan masalalardan birini keyinchalik batafsil o'rganiladi. Yani, oddiy differentsial tenglama qo'yiladigan masala, kechikkan, neytral, o'tuvchi tipdagi differentsial-funktsional tenglamalarning har biri uchun orinli bo'ladi yoki kamida bitta yechiga ega bo'lishi tasdiqlanadi.

Quyidagi differentsial-funktsional tenglamalar berilgan bo'lsin:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + \sum_{k=1}^{n} A_k X(t - r_k) + F(t); \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) = ax(t) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k x^{(k)}(t) + \\ + \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} a_{ks} x^{(s)}(t - r_{ks}) + F(t); \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) = AX(t) + \sum_{k=1}^{n} A_k X(t - r_k) + \\ + \sum_{k=1}^{m} B_k \dot{X}(t - r_k) + F(t); \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$x^{(n)}(t) = ax(t) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k x^{(k)}(t) + \\ + \sum_{k=1}^{n} b_k x(t - r_k) + \\ + \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} a_{ks} x^{(s)}(t - r_{ks}) + F(t), \qquad (1.12)$$

bu yerda $r_k > 0, r_{ks} > 0$ bo’lgan, avvaldan berilgan, qandaydir o’zgarmas sonlar, a, a_k, a_{ks}, b_k lar noma’lumlar oldida turgan o’zgarmas yoki faqat t argumentga bog’liq bo’lgan funktsiya, A, A_k, B_k lar n chi tartibli o’zgarmas yoki faqat t ga bog’liq bo’lgan o’zgaruvchi matritsadan iborat bo’lishi mumkin. Odatda, A, A_k va B_k lar o’zgarmas (o’zgaruvchi) n chi tartibli kvadrat matritsadan iborat bo’lganda, (1.9) va (1.11) ga, mos ravishda, n noma’lumli n ta o’zgarmas (o’zgaruvchi) koeffitsientli, chiziqli, bir jinsli bo’lmagan (bir jinsiz) kechikkan va neytral tipdagi differentsial-funktsional tenglamalar sistemasini matritsa formasidagi yozuvini ifoda etadi. Shuningdek, (1.9) va (1.11) da $F(t) = 0$ bo’lsa, ularga bir jinsli tenglamalar deyiladi. Ushbu mulohazalar (1.10) va (1.12) tenglamalar uchun ham o’rilidir.

$f(t) = 0$ bo’lganda (1.9), (1.10), (1.11) va (1.12) larning har biri chiziqli, bir jinsli tenglamalardan iborat bo’lgani uchun quyidagi mulohazalar o’rinlidir:

a). Agar $\varphi(t)$, ning biror xususiy yechimi va $C-$ihtiyoriy o’zgarmas bo’lsa, u holda $C\varphi(t)$ ham uning yechimidan iborat bo’ladi; b). Agar $\varphi_1(t)$ va $\varphi_2(t)$, uning ixtiyoriy ikkita xususiy yechimi bo’lib, C_1 va C_2 lar ihtiyoriy o’zgarmaslardan iborat bo’lsa, u holda $C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)$ ham yechim bo’ladi; c). Agar $\varphi(t, C)$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo’lib, bir jinsli tenglamaga mos keluvchi bir jinssiz tenglamaning xususiy yechimi $-\psi(t)$ bo’lsa, u holda $\varphi(t,C) + \psi(t)$ jinssiz tenglamaning umumiy yechimidan iborat bo’ladi. (1.9), (1.10), (1.11) va (1.12) larga mos keluvchi bir jinsli tenglamalar quyidagi ko’rinishda yoziladi:

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + \sum_{k=1}^{n} A_k Y(t - r_k); \qquad (1.13)$$

$$y^{(n)}(t) = ay(t) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k y^{(k)}(t) + \\ + \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=0}^{n} a_{ks} y^{(s)}(t - r_{ks}); \qquad (1.14)$$

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + \sum_{k=1}^{n} A_k Y(t - r_k) + \\ + \sum_{k=1}^{m} B_k \dot{Y}(t - r_k); \qquad (1.15)$$

$$y^{(n)}(t)=ay(t)+\sum_{k=1}^{n-1}a_k y^{(k)}(t)+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}b_k y(t-r_k)+ \qquad (1.16)$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}a_{ks}y^{(s)}(t-r_{ks}).$$

Ushbu tenglamalardan, bizga keyinchalik kerak bo'ladigan (1.14) tenglamaning umumiy yechimi haqidagi umumiy tushunchalarni keltiraylik. Buning uchun, (1.14) tenglamani birorta xususiy yechimini

$$y(t)=Ce^{\lambda t} \qquad (1.17)$$

deb olaylik, bu erda C – ihtiyoriy o'zgarmas son, λ – noma'lum parametr. λ – noma'lum parametrni aniqlash uchun, (1.17) ni (1.14) ning yechimi deb faraz qilib, uni (1.14) ga qo'ysak

$$\lambda^n = a+\sum_{k=1}^{n-1}a_k\lambda^n+\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}a_{ks}\lambda^s e^{-\lambda\cdot r_{ks}}=0 \qquad (1.18)$$

trantsendent tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaga (1.14) ning xarakteristik tenglamasi deyiladi. Ushbu xarakteristik tenglama kompleks sonlar maydonida cheksiz ko'p yechimlarga ega. U ildizlar orasida karralilari ham bo'lishi mumkin. (1.18) tenglamaning har xil ildizlarini $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\dots$ lar bilan belgilab, ulardan ihtiyoriy bittasini λ_j deb olaylik. Bu ildizga mos keluvchi (1.14) bitta xususiy yechimi

$$y_j(t)=C_j e^{\lambda_j t} \qquad (1.19)$$

ko'rinishda yoziladi. Lekin, (1.14) chiziqli, bir jinsli tenglamadan iborat bo'lgani uchun, uning barcha xususiy yechimlarini chiziqli kombinatsiyasi yana (1.14) ning yechimidan iborat bo'ladi yoki (1.14) ning umumiy yechimi

$$y(t)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j e^{\lambda_j t} \qquad (1.20)$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda $C_0,C_1,\dots$ – ihtiyoriy o'zgarmas sonlar. Agar $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\dots$ ildizlar orasida karralilari mavjud bo'lsa, u holda (1.20) yechim boshqacharoq ko'rinishni oladi.

(1.14) tenglamada keltirilgan a,a_k,a_{ks},r_{ks} larning barchasi o'zgarmas sonlardan iborat deb qaraldi.

Adabiyotlar

1. F.Rajabov va boshq. “Oliy matematika” , Toshkent “O‘zbekiston” 2007 yil. 400 b.

2. R.Jo'raqulov, S.Akbarov, D.Toshpo'latov, Matematika, darslik, Toshkent, 2022
3. R.Jo'raqulov, D.Toshpo'latov, S.A.Akbarov, R.A.Umarov, Oliy matematika, o'quv q'ollanma , Toshkent, 2022
4. P.YE..Danko va boshqalar. "Oliy matematika misol va masalalarda " Toshkent, "O'qituvchi" 2007yil. 136 b.
5. YO.U.Soatov "Oliy matematika" , Toshkent, "O'qituvchi", 1998 yil, 456 b.
6. N.S.Piskunov "Differensial va integral" (ruschadan tarjima) Toshkent"O'qituvchi", 1974, 1, 2-qism.
7. O.Abduraxmonov "Ko'p yadroli protsessorda kubik bazisli splaynlar asosida parallel algoritmlarni amalga oshirish tuzilmasini ishlab chiqish" Academic Research In Edicational Sciences Scientific Journal // Vol.2,Issue3.,Pages: 628-633,2021 y.